ΠΧ 1

$S_3 = \{ Id, (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (1,3), (2,3) \}$

αν $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) \circ (1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (3,2)$

οπου είναι διαφορετικό απο το

$(1,3) \circ (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)$

Άρα, η S_3 όχι αβελιανή

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η S_n $\forall n \geq 3$ είναι μη αβελιανή

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΥΣΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ.

Έστω S_7: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \sigma = (1,2,3)(5,6)$

Δηλ. αναλύσαμε την σ σε γινόμενο κύκλων και μάλιστα ξένων

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Τάξη ενός στοιχείου $\alpha \in G$, G ομάδα ορίζεται ως ο ελάχιστος φυσικός k : $\alpha^k = e_G$.

Πχ 2

$S_3 = \{Id, \rho, \rho^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

$o(\rho) = 3$, $o(\mu_1) = o(\mu_2) = o(\mu_3) = 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $\sigma \in S_n \Rightarrow$ η τάξη της σ είναι το ΕΚΠ των μηκών των ξένων κύκλων που διασπάται η σ.

Πχ 3

Στο Π.χ.1 $o(\sigma) = ΕΚΠ(3,2) = 6$

Έτσι το $\sigma^{2000} = \sigma^{333\cdot 6+2} = \underbrace{(6^6)^{333}}_{Id} \cdot \sigma^2 = \sigma^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ένας κύκλος $\sigma \in S_n$ μήκους 2, καλείται αντιμετάθεση

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Οι αντιμεταθέσεις της S_n, παράγουν την S_n

(Δηλ. κάθε στοιχείο $\sigma \in S_n$, γράφεται ως γινόμενο αντιμετάθ.)

Μαθηματική έκφραση του θεωρήματος:

"Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) \in S_n \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) =$
$= (\alpha_1, \alpha_k)(\alpha_1, \alpha_{k-1}) \dots (\alpha_1, \alpha_2)$."

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ καλείται άρτια (αντίστοιχα περιττή) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους (αντίστοιχα περιττού) αντιμεταθέσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ-ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων της S_n, αποτελεί ομάδα (και μάλιστα $\leq S_n$) και μάλιστα καλείται εναλλάσσουσα ομάδα συμμετριών A_n

πχ

$$S_9: \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 9 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1,3,5)(4,6,9,8,7) = (1,5)(1,3)(4,7)(4,8)(4,9)(4,6)$$

άρα άρτια μετάθεση

Εφαρμογή

$$S_3 = \{Id, \rho, \rho^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{Id, (1,2,3), (1,3,2), (2,3), (1,3), (1,2)\}$$

$$A_3 = \underbrace{\{Id, \rho, \rho^2\}}_{= \langle \rho \rangle} \leq S_3 \qquad A_3: \text{κυκλική}$$

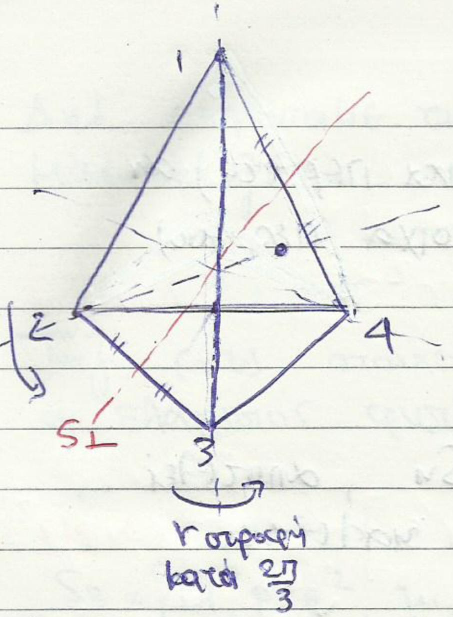
Επίσης, $A_3 = \frac{3!}{2} = 3$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Σχόλιο:

Το σύνολο των περιττών μεταθέσεων δεν είναι ομάδα διότι πολύ απλά η πράξη σε αυτό δεν είναι κλειστή για παράδειγμα $(1,3)(1,2) = (1,2,3) \notin$ στο σύνολο των περιττών μεταθέσεων. (ή θα μπορούσαμε να δούμε ότι το ταυτοτικό στοιχείο δεν ανήκει σε αυτήν)



Άξονας 1 σταθερός:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, e$$

Άξονας 2 σταθερός:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, e$$

Άξονας 3 σταθερός:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, e$$

Άξονας 4 σταθερός:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, e$$

$$S_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

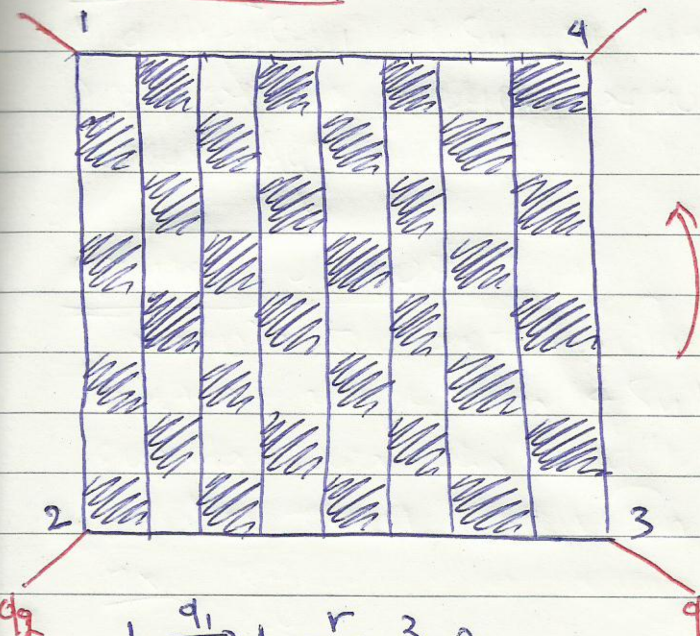
$$S_3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Έτσι παίρνουμε το:

$\{Id, (2,3,4), (2,4,3), (1,3,4), (1,4,3), (1,2,4), (1,4,2), (1,2,3),$
$(1,3,2), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\} = A_4$

διότι $|A_4| = \frac{|S_4|}{2} = 12$

ΣΚΑΚΙΕΡΑ



στροφή κατά γωνία π.

συμμετρίες $r, r^2 = Id, q_1, q_2$

$q_1^2 = q_2^2 = Id$

"Πίνακας πράξης:"

$\cdot$	Id	r	q_1	q_2
Id	Id	r	q_1	q_2
r	r	Id	q_2	q_1
q_1	q_1	q_2	Id	r
q_2	q_2	q_1	r	Id

↓

Έχουμε δομή ομάδας

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{q_1} 1 \xrightarrow{r} 3 \\ 2 \xrightarrow{q_1} 4 \xrightarrow{r} 2 \\ 3 \xrightarrow{q_1} 3 \xrightarrow{r} 1 \\ 4 \xrightarrow{q_1} 2 \xrightarrow{r} 4 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε

Ομάδα V Klein $= \{e, \alpha, b, c\}$ ώστε $\alpha^2 = b = c^2 = e$

και $\alpha \cdot b = c = b\alpha$, $\alpha c = b = c\alpha$, $bc = \alpha = cb$

"Πίνακας πράξης" στην ομάδα Klein

$\cdot$	e	α	b	c
e	e	α	b	c
α	α	e	c	b
b	b	c	e	α
c	c	b	α	e

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ομάδες συμμετριών (έστω G) και η ομάδα V κλάιν (έστω G') είναι δομικά ΙΔΙΕΣ (Δηλ. είναι ισόμορφες*)

Έτσι ορίζουμε $\varphi: G \to G'$ τω

$Id \mapsto e$, $r \mapsto \alpha$, $q_1 \mapsto b$, $q_2 \mapsto c$

όπου εξ ορισμού αυτή είναι 1-1 και επί

(Στο επόμενο μάθημα θκει νδο φ ομομορφισμός ώστε να οριστεί η έννοια ισομορφισμού)